PROGRAMME DE RÉVISIONS DE FIN D'ANNÉE

LAST BUT NOT LEAST

ECG 2 Maths appliquées, http://louismerlin.fr.

1. Questions de cours.

1.1. **Densité de probabilité.**

Question. Montrer qu'une fonction définit une densité de probabilité.

Variantes. Dans certains cas, il n'y a pas une fonction mais une famille de fonctions f_a (une fonction pour chaque nombre a). On demande alors de trouver le paramètre a pour que f_a définisse une densité de probabilité.

Remarque. Même si c'est une question de cours, il y a quand même un calcul à faire, celui de l'intégrale de f ou de chacune des fonctions f_a.

Méthode. On vérifie que f (ou f_a) est continue, positive et d'intégrale 1. Dans certains barèmes, citer les trois conditions rapporte déjà des points.

Exemple. **ECRICOME** 2020 Exercice 3 Question **2.a)**

1.2. **Intégrales et séries de Riemann.**

Question. Rappeler les conditions de convergence d'une intégrale de Riemann.

Variantes. On peut aussi demander la valeur précise de l'intégrale parce que les intégrales de Riemann se calculent explicitement. La question existe aussi pour des séries de Riemann mais on ne peut pas demander la valeur de la somme.

Remarque. La question n'est souvent pas posée de cette façon-là mais. Le sujet donne une fonction de la forme $\frac{1}{t^\alpha}$ ou parfois $\frac{c}{t^\alpha}$ avec c une constante et α un nombre explicite et demande si la fonction est intégrable. Il s'agit alors uniquement de citer le cours.

Méthode. Identifier si α est strictement supérieur ou inférieur à 1. Conclure.

Exemple. **ECRICOME** 2019 Exercice 3 Partie A Question **2** pour les intégrales ou **ECRICOME** 2018 Exercice 2 Question **2.(d)** pour les séries.

1.3. **Lois classiques.**

Question. Identifier une loi de probabilité classique en repérant ce qu'elle modélise.

Variantes. On demande parfois de rappeler la loi d'une variable aléatoire dont on sait qu'elle suit une certaine loi classique.

Remarque. Un cas fréquent où cette question est posée apparaît lorsqu'on fait une expérience aléatoire qui est une suite d'expérience du type succès/échec (Bernoulli). On demande alors quelle est la loi du nombre de succès après n expériences de Bernoulli. C'est bien sûr une binomiale. Tout aussi classique : le temps de premier succès qui suit une loi géométrique.

Méthode. Connaître les lois classiques de son cours. On rappelle que pour décrire une loi, il faut donner son support et les paramètres.

Exemple. **ECRICOME** 2018 Exercice 3 Partie I Question **1**

1.4. **Générer les termes d'une suite récurrente.**

Question. Écrire un programme qui demande à l'utilisateur de rentrer un entier n, puis qui calcule et affiche le terme u_n d'une suite récurrente.

Variantes. Parfois on ne demande pas à l'utilisateur de choisir un entier et on demande directement de calculer un terme de la suite récurrente.

Remarque. La structure du programme est souvent donnée, il ne s'agit que de compléter le programme.

Méthode. On initialise un compteur u au premier terme de la suite. Puis on écrit une boucle `for` et, à chaque passage dans la boucle, on calcule le terme suivant de la suite (c'est-à-dire on change u qui vaut u_k au début du tour dans la boucle en u_{k+1} pendant le tour). Après la boucle, on affiche u.

Exemple. **EML** 2019 Exercice 3 Partie C Question **9** (à transformer en Python).

1.5. Dichotomie.

Question. Écrire un programme pour trouver une valeur approchée d'un nombre réel défini comme la solution d'une équation $f(x) = 0$.

Variantes. Attention l'équation ne se présente pas toujours sous la forme $f(x) = 0$, mais peut-être parfois $f(x) = x$, ou autre.

Remarque. Ce n'est souvent pas une question de début d'exercice. Penser à répondre à la question même si vous n'avez pas fait tout l'exercice. Dans la plupart des cas, la structure du programme est déjà donnée et il s'agit simplement de le compléter.

Méthode. On utilise la méthode de la dichotomie.

Exemple. **ECRICOME** 2019 Exercice 2 Partie B Question **5.c** (à transformer en Python).

1.6. Applications linéaires.

Question. Montrer qu'une application est linéaire.

Variantes.

Remarque. La question peut faire un peu peur à cause du contexte (parfois l'application est une application entre matrices ou entre polynômes) mais elle est très facile.

Méthode. On utilise la définition $f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$. Attention α est ici un nombre réel, tandis que u et v sont des vecteurs d'un certain espace vectoriel.

Exemple. **EDHEC** 2020 Exercice 1 Question **2.a**

1.7. Moyenne empirique.

Question. Calculer l'espérance et la variance de la moyenne empirique.

Variantes.

Remarque.

Méthode. On calcule l'espérance de l'estimateur et on utilise la linéarité de l'espérance. Attention à ne pas citer l'indépendance des variables de l'échantillon, il n'y en a pas besoin (l'espérance d'une somme est toujours la somme des espérances).

On calcule ensuite la variance de l'estimateur. Attention, ici, il faut maintenant citer l'indépendance des variables de l'échantillon. On se souviendra que

$$V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} V(X_i)}{n^2} = \frac{V(X_1)}{n}.$$

On justifiera chacune des égalités de cette chaîne.

Exemple. **EDHEC** 2018 Exercice 3 Question **6.a**

1.8. Dimension.

Question. Montrer que la famille ... est une base d'un espace vectoriel et en déduire sa dimension.

Variantes. Donner la dimension d'un (sous)-espace vectoriel.

Remarque. La première partie de la question ne peut pas être considérée comme une question de cours (voir question 2.11). En revanche, une fois que l'on connaît une base, il est facile d'en déduire la dimension.

Dans le cas de la variante, il faut faire apparaître soi-même la base (elle est souvent évidente dans le contexte).

Méthode. Il suffit de compter les éléments de la base.

Exemple. **ECRICOME** 2021 Exercice 1 Partie A : pour passer de la question **2.b** à la **c.**, il faut calculer une dimension.

1.9. Problème de Cauchy.

Question. Montrer que le système

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = u \end{cases}$$

(où A est une matrice fixée et u est un vecteur colonne fixé) a une unique solution.

Variantes. Soit X_1 et X_2 deux solutions au système $X' = AX$. Si $X_1(0) = X_2(0)$, que peut-on dire de ces deux fonctions.

Remarque. Pour trouver la solution explicitement à un problème de Cauchy, c'est plus difficile, voir 2.22.

Méthode. Il y a *existence* et *unicité* des solutions à un problème de Cauchy. Dans la cas de la question de base, il suffit de citer le cours ("il y a existence et unicité à un problème de Cauchy et on voit que les deux conditions $X' = AX$ et $X(0) = u$ constituent un problème de Cauchy"). Dans le cas de la variante, il suffit de citer l'unicité ("il y a unicité des solutions à un problème de Cauchy, X_1 et X_2 sont deux solutions du même problème de Cauchy, donc X_1 et X_2 sont les mêmes").

Exemple. **EML** 2023 sujet 0 Exercice 1 Question **3**

1.10. Résoudre une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.

Question. Donner *toutes* les solutions d'une équation différentielle $y' = ay$

Variantes. Donner *la* solution du problème de Cauchy $y' = ay$, $y(0) =$ quelque chose d'explicite.

Remarque. Pour un problème de Cauchy, ce n'est pas nécessairement la valeur en 0 qui est donnée comme condition initiale. Pour le cas, avec second membre, c'est plus difficile, voir 2.21.

Méthode. Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme $y(t) = Ce^{at}$ où C est une constante quelconque qui sert justement à décrire *toutes* les solutions. Dans le cas du problème de Cauchy, on choisit C grâce à la condition $C = y(0)$ qui est donc donné. Dans le cas (rare) où la condition initiale est la donnée de $y(t_0)$ avec un t_0 explicite mais qui n'est pas 0, on choisit C grâce à la condition $y(t_0) = Ce^{at_0}$.

Exemple. **EML** 2023 sujet 0 Exercice 1 au cours de la question 2.

1.11. Résoudre une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2.

Question. Donner les solutions d'une équation différentielle de la forme

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Variantes. Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}.$$

Remarque. Comme précédemment, ce n'est pas forcément la valeur en 0 qui est imposée comme condition initiale. Pour le cas, avec second membre, c'est plus difficile, voir 2.21.

Méthode. Pour la recherche de *toutes* les solutions, on résout l'équation caractéristique
$$x^2 + ax + b = 0.$$
Les deux solutions x_1 et x_2 donnent les solutions de l'équation différentielle
$$y(t) = C_1 e^{x_1 t} + C_2 e^{x_2 t}.$$
Dans le cas de la variante, on cherche C_1 et C_2 avec les conditions initiales.

Exemple. Pas d'annale encore sur ce sujet (c'est une nouveauté du programme).

1.12. **Citer le cours.**

Question. Donner la définition de ... ou Citer les propriétés de ...

Remarque. C'est la question la plus naïve que l'on rencontre dans les textes de concours : il s'agit tout simplement de citer une définition ou une propriété du cours.

Variantes. Tout le cours est susceptible d'être demandé. On voit souvent (liste non exhaustive) Donner la définition de deux matrices semblables ; Citer la loi faible des grands nombres ; Donner une définition et les propriétés de la covariance ; Quel est le lien entre l'indépendance de deux variables aléatoires et la covariance ; Quelle est la dimension d'un espace vectoriel, rappeler la loi d'une variable de référence, citer les résultats sur la convergence des intégrales ou des séries de Riemann, celui sur les séries géométriques ...

Méthode.

Exemple. **ECRICOME** 2021 Exercice 2 Partie C Question **7.a**

2. Questions classiques.

2.1. **Existence d'une unique solution à une équation.**

Question. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Variantes. On peut aussi demander de montrer qu'il existe une solution à cette équation dans un intervalle plus restreint $[a, b]$. Ou encore montrer que chaque équation $f_n(x) = 0$ admet une solution pour tout n (c'est le cas par exemple lorsqu'on définit une suite implicitement). Parfois on peut aussi demander de montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution, on se ramène alors au cas précédent en posant $f(x) = g(x) - x$: trouver une solution pour $g(x) = x$ revient en effet à trouver une solution pour $f(x) = 0$.

Remarque. Dans cette question, on ne cherche pas à déterminer explicitement la solution, mais seulement à justifier qu'elle existe. Lorsqu'on demande de trouver la solution, la question est formulée différemment. La question apparaît le plus souvent au début d'un exercice sur les suites implicites.

Méthode. On cherche à appliquer le théorème de la bijection. Attention à n'oublier aucune hypothèse avant d'utiliser ce théorème.

Exemple. **ECRICOME** 2020 Exercice 2 Partie A Question **6**

2.2. **Minoration/majoration des suites récurrentes.**

Question. Montrer qu'une suite récurrente $(u_{n+1} = f(u_n))$ est majorée ou minorée ou les deux.

Variantes.

Remarque.

Méthode. On procède par récurrence : le premier terme de la suite est donné donc l'initialisation ne pose aucun problème. Puis on utilise la relation de récurrence qui définit la suite pour prouver l'hérédité.

Exemple. **EDHEC** 2013 Exercice 1 Question **1.a**

2.3. **Monotonie d'une suite récurrente.**

Question. Montrer qu'une suite récurrente $(u_{n+1} = f(u_n))$ est monotone.

Variantes.

Remarque. On commence toujours par vérifier si la fonction f qui définit la suite est croissante.

Méthode. La question se résout très simplement si la fonction f est croissante. Dans le cas où f n'est pas croissante, on cherche le signe de $u_{n+1} - u_n$. Des encadrements de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peuvent aider (question précédente).

Exemple. **EDHEC** 2013 Exercice 1 Question **1.b**

2.4. **Convergence d'une suite récurrente.**

Question. Montrer qu'une suite récurrente $(u_{n+1} = f(u_n))$ est convergente.

Variantes. On peut aussi demander de préciser la limite.

Remarque. Ce n'est en général pas la première question de l'exercice et il faut souvent utiliser les deux questions précédentes (des majorations et le sens de variation). Ne pas hésiter donc à admettre les questions précédentes si elles posent problème pour répondre à celle-ci qui est très facile.

Méthode. On utilise le théorème de convergence monotone pour prouver la convergence. Si on veut calculer la limite, on utilise le théorème du point fixe.

Exemple. **EDHEC** 2013 Exercice 1 Question **1.c**

2.5. **Suite convergente avec le théorème des gendarmes.**

Question. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Variantes.

Remarque. Comme dans le cas précédent, le contexte est important. On vient de montrer aux questions précédentes un encadrement du terme général de la suite et on a obtenu des inégalités de la forme

$$\alpha_n \leqslant u_n \leqslant \beta_n.$$

On peut d'ailleurs si besoin admettre la preuve de l'encadrement et finir l'étude de la convergence.

Méthode. On montre que les deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite. En général, c'est très facile, par exemple, il est fréquent que l'une des deux soient constante et que l'autre converge pour une raison très simple vers cette même constante. On cite alors le théorème des gendarmes et on conclut que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers la même limite.

Exemple. **EDHEC** 2022 Exercice 3 Question **2**

2.6. **Série convergente.**

Question. Montrer qu'une série est convergente.

Variantes.

Remarque. Dans cette question, on ne demande pas de calculer la valeur de la somme, c'est donc que c'est sûrement impossible. Il ne faut donc pas tenter de faire un calcul explicite.

Méthode. On utilise l'un des théorèmes de comparaison. Il est très probable que le sujet indique quel théorème de comparaison il faut appliquer, par exemple en ayant fait démontrer une majoration, ou un équivalent ou une relation de négligeabilité dans les questions précédentes.

Exemple. **ECRICOME** 2018 Exercice 2 Partie I Question **2.d**

2.7. **Calcul de somme.**

Question. Montrer qu'une série est convergente et calculer sa somme

Variantes. Il est fréquent que la question donne la valeur de la somme, la question devient alors : Montrer que la série est convergente et que sa somme vaut ...

Remarque. Puisqu'il faut calculer la limite, il faut justifier dans le même argument la convergence et la valeur de la limite. Attention à la rédaction et à ne pas écrire trop vite de somme infinie avant d'avoir justifié la convergence.

Méthode. On montre que la série est de l'un des trois types de séries dont on sait calculer la somme : série télescopique, série géométrique ou série exponentielle. On calcule donc les sommes partielles et on reconnaît une série d'un des types précédents.

Exemple. **ECRICOME** 2018 Exercice 2 Partie I Question **2.e**

2.8. **Intégrale convergente.**

Question. Montrer qu'une intégrale impropre est convergente.

Variantes.

Remarque. La question ressemble beaucoup à celle sur les séries. De même, on ne doit pas tenter de faire un calcul explicite.

Méthode. On utilise un théorème de comparaison et on cherche dans les questions précédentes si le théorème adapté n'a pas été suggéré. Dans la rédaction, bien préciser en quel(s) point(s) l'intégrale est impropre.

Exemple. **ECRICOME** 2021 Exercice 2 Partie A Question **1.b** et **2.b**

2.9. **Calcul d'intégrale.**

Question. Calculer une intégrale.

Variantes.

Remarque. Dans les sujets de Maths I, s'il faut faire une intégration par parties ou un changement de variables, la méthode est indiquée. Dans les sujets de Maths II, il faut souvent prendre l'initiative de la méthode.

Méthode. Lorsque le sujet ne mentionne ni intégration par partie, ni changement de variable, on cherche une primitive de la fonction intégrée. Sinon, on procède comme indiqué par le texte. Dans le cas des changements de variables, si le changement de variables n'est pas indiqué, c'est qu'il faut faire un changement affine (de la forme $u = at + b$).

Exemple. **ECRICOME** 2021 Exercice 2 Partie A Question **1.b**

2.10. **Espace vectoriel.**

Question. Un ensemble est-il un espace vectoriel.

Variantes. Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel (c'est plus facile).

Remarque. Lorsque c'est la première question d'un exercice (ou d'une série de questions), il est très probable que l'ensemble soit un espace vectoriel. Si ce n'est pas la première question de l'exercice, il est très probable que l'ensemble ne soit pas un espace vectoriel et que les questions précédentes permettent de comprendre pourquoi.

Méthode. On utilise soit la caractérisation abstraite (pour montrer que c'est un espace vectoriel), soit on trouve un contre-exemple à la caractérisation abstraite pour montrer que ce n'est pas un espace vectoriel. Attention un contre-exemple doit être complètement explicite : on donne par exemple un vecteur u de l'ensemble et un nombre réel α tel que αu n'est plus dans l'ensemble. Il suffit d'un seul u et α et ils doivent être donnés concrètement.

Exemple. **ECRICOME** 2021 Exercice 1 Partie A Question **2** et **2.b**

2.11. **Base.**

Question. Montrer qu'une famille est une base.

Variantes. Cette question apparaît de plusieurs façons différentes. Parfois il s'agit de donner une base d'un certain espace vectoriel (souvent un espace propre), parfois le sujet nous fait construire petit à petit une famille de vecteurs et, vers la fin de l'exercice, on montre que la famille de tous ces vecteurs est une base. Voir aussi question 1.8.

Remarque. La méthode est différente s'il y a un seul, ou deux, ou plus de deux vecteurs.

Méthode. S'il n'y a qu'un seul vecteur, il suffit de dire qu'il est non nul. S'il y a deux vecteurs, il s'agit de dire qu'ils ne sont pas colinéaires. S'il y a plus de deux vecteurs on revient à la définition de famille libre.

Exemple. **EDHEC** 2019 Exercice 1 Question **5.a**

2.12. **Valeur propre.**

Question. Montrer que λ est valeur propre de A.

Variantes. Montrer que λ est valeur propre et expliciter l'espace propre $E_\lambda(A)$.

Remarque. C'est une question facile mais les erreurs peuvent coûter cher. Si on se trompe dans la résolution du système, on n'aura pas le bon espace propre et pas la bonne dimension de l'espace propre et on ne pourra pas conclure correctement sur la diagonalisabilité de la matrice.

Méthode. On résout le système $AX = \lambda X$.

Exemple. **ECRICOME** 2020 Exercice 1 Partie B Question **4**

2.13. **Valeur propre et polynôme annulateur.**

Question. Trouver les valeurs propres à l'aide d'un polynôme annulateur (le polynôme a été obtenu dans une des questions précédentes).

Variantes. Montrer qu'un polynôme est annulateur et en déduire les valeurs propres de la matrice.

Remarque.

Méthode. Pour montrer que le polynôme est annulateur, on fait un calcul explicite. Par exemple, pour montrer que $(X-1)(X+1)(X-3)$ est annulateur de la matrice A, on calcule $A - Id$, $A + Id$ et $A - 3Id$ puis on fait le produit matriciel de ces trois matrices et on vérifie que l'on trouve bien 0. Ensuite, on cite le cours : on sait que les valeurs propres sont des racines du polynôme annulateur. On vérifie donc si chaque racine est ou n'est pas valeur propre. C'est-à-dire, pour chaque racine λ du polynôme annulateur, on résout le système $AX = \lambda X$: si on trouve des solutions X non nulles, on en déduit que λ est valeur propre. Si on ne trouve que la solution nulle, alors λ n'est pas valeur propre.

Exemple. **EDHEC** 2019 Exercice 1 Question **3.a**

2.14. **Polynôme annulateur à deviner avec un programme Python.**

Question. On considère le programme Python suivant (exemple).

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

A = np.array([[0,-1,1,0],[-1,0,0,1],[1,0,0,-1],[0,1,-1,0]])

B = alg.matrix_power(A,3)-4*A

print("A**3-4A=",B)
```

Ce programme retourne

```
A**3-4A =
[[1.0  0  0  0]
 [0  1.0  0  0]
 [0  0  1.0  0]
 [0  0  0  1.0]]
```

Trouver un polynôme annulateur de A.

Variantes. Le programme ne retourne pas forcément la matrice identité, mais peut être un multiple de l'identité ou la matrice nulle. Dans ce cas, il faut ajuster le polynôme annulateur.

Remarque. La difficulté de cette question est en fait une difficulté de rédaction. On rappelle que l'on ne peut pas croire à la fiabilité totale du calcul fait par ordinateur. Le programme informatique nous permet donc de proposer *une conjecture* et il faut compléter cette conjecture par un calcul pour vérifier.

Méthode. Le programme nous laisse à penser que

$$A^3 - 4A = I$$

donc que le polynôme $P(x) = x^3 - 4x - 1$ est annulateur de A. On vérifie ensuite cette conjecture en calculant explicitement

$$A^3 - 4A - I_4.$$

Exemple. **DST 5** Problème 1 Question 1.

2.15. **Valeur propre et espaces propres à deviner avec un programme Python.**

Question. On considère le programme Python suivant (exemple).

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

A=np.array([[0,-1,1,0],[-1,0,0,1],[1,0,0,-1],[0,1,-1,0]])

r1 = alg.matrix_rank(A-2*np.eye(4))
r2 = alg.matrix_rank(A+2*np.eye(4))

print("r1 = ",r1)
print("r2 = ",r2)
```

L'exécution de ce programme donne

```
r1 = 3
r2 = 2
```

Trouver deux valeurs propres de A. Que peut-on dire de la dimension des espaces propres ?

Variantes. Bien sûr il n'y a pas forcément deux valeurs propres et la dimension des espaces propres associés n'est pas toujours celle-ci.

Remarque. Pour passer du rang de $A - 2I_4$ à la dimension de $\ker(A - 2I_4)$, il faut utiliser (et citer !) le théorème du rang.

Méthode. Le programme nous laisse penser que 2 et -2 sont valeurs propres et que le rang de $A - 2I_4$ est de 3 et que le rang de $A + 2I_4$ est de 2. Donc *par le théorème du rang* on conjecture que $\dim\ker(A - 2I_4) = 1$ et que $\dim\ker(A + 2I_4) = 2$. Ce qu'il faut vérifier par la résolution des deux systèmes associés.

Exemple. **EDHEC**2022 Exercice 1 Question 5.

2.16. **Réduction des matrices 2,2.**

Question. Trouver les valeurs propres d'une matrice de taille 2×2.

Variantes.

Remarque. C'est le seul cas où on peut demander de trouver les valeurs propres sans que le sujet fournisse au préalable la marche à suivre (sauf dans de rares cas que l'on trouve dans des sujets d'annales plus anciens ou dans les sujets de Maths 2.). Pour les matrices 2×2, la question n'est pas dure. Cette question se trouve souvent dans un exercice sur les fonctions de deux variables et la matrice 2×2 est la hessienne de la fonction en un point critique.

Méthode. On sait que λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible. Puis on sait si une matrice 2×2 n'est pas inversible : c'est équivalent au fait que le déterminant s'annule.

Exemple. **EDHEC** 2021 Exercice 1 Partie I Question **3.b**

2.17. **Vecteur propre.**

Question. Montrer que u est vecteur propre.

Variantes. Calculer $f(u)$ et en déduire une valeur propre pour f.

Remarque.

Méthode. On montre qu'il existe λ tel que $f(u) = \lambda u$. Les valeurs de λ sont souvent $0, 1, -1, 2$ ou -2.

Exemple. **EML** 2021 Problème 2 Partie D Question **9.c**

2.18. **Diagonalisation.**

Question. On étudie une matrice A et on demande de trouver une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$.

Variantes. Parfois on demande de calculer P^{-1}, parfois non.

Remarque. C'est souvent la dernière question d'une série et il s'agit de récapituler. Attention, ne pas perdre de temps à calculer P^{-1} si ce n'est pas demandé.

Méthode. La matrice D est diagonale et contient les valeurs propres de M sur la diagonale. La matrice P est la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres. S'il faut calculer P^{-1}, on utilise la méthode de Gauss-Jordan.

Exemple. **EML** 2021 Problème 2 Partie B Question **4.c**

2.19. **Puissances de matrices.**

Question. Calculer les puissances d'une matrice.

Variantes. C'est une question centrale, elle peut intervenir dans un exercice d'analyse (système linéaire récurrent) ou dans un exercice de probas (chaîne de Markov).

Remarque. Ce n'est pas la première question de l'exercice ou de la série de question. Au préalable, on aura soit diagonalisé la matrice, soit suggéré une écriture de la matrice sous forme de somme qui permet d'utiliser la formule du binôme.

Méthode. Si on a diagonalisé la matrice, on se sert de sa forme diagonale pour calculer les puissances (si $A = PDP^{-1}$, alors $A^n = PD^nP^{-1}$). Si on a écrit la matrice sous forme de somme et que les termes de la somme commutent, on utilise la formule du binôme (dans ce cas, c'est un peu plus difficile).

Exemple. **ECRICOME** 2016 Exercice 1 Partie B Question **3** (version facile) ou **ECRICOME** 2019 Exercice 1 Partie A Question **3.e** (version difficile)

2.20. **Donner la matrice de transition d'une chaîne de Markov.**

Question. On considère une suite de variables aléatoires discrètes (X_n) de même support $[\![1, k]\!]$ (très souvent $k = 3$), ce sont les *états* de la chaîne et où la loi de X_{n+1} dépend de la réalisation de X_n. On note alors U_n le vecteur ligne

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & \cdots & P(X_n = k) \end{pmatrix}.$$

La question consiste alors à trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ telle que $U_{n+1} = U_n M$.

Variantes. . Plus brutalement, il est possible que le sujet demande de trouver la matrice de transition de la chaîne de Markov. C'est de cette matrice M dont il s'agit.

Remarque. Il faut absolument rédiger la réponse à l'aide de la formule des probabilités totales (appliquée k fois, c'est-à-dire autant de fois qu'il y a d'états de la chaîne) et le système complet d'événements $\{[X_n = 1], \cdots, [X_n = k]\}$. Attention à bien citer à la fois la formule et le système complet d'événements. Puisqu'il faut appliquer cette formule k fois, on peut se contenter d'une rédaction parfaite pour la première ou les deux première fois, puis aller un peu plus vite les fois suivantes.

Méthode. On applique donc la formule des probas totales avec le SCE donné ci-dessus. On obtient, pour chaque i

$$P(X_{n+1} = i) = \sum_{j=1}^{k} P(X_n = j) P_{[X_n = j]}(X_{n+1} = j).$$

Les probabilités conditionnelles sont données dans l'énoncé (c'est d'ailleurs comme ça que l'on définit une chaîne de Markov. On remarque donc que chaque nombre $P(X_{n+1} = i)$ est une combinaison linéaire des nombres $P(X_n = 1), \cdots, P(X_n = k)$, c'est-à-dire que les coordonnées de U_{n+1} sont des combinaisons linéaires des coordonnées de U_n. On a donc bien une relation matricielle $U_{n+1} = U_n M$.

Exemple. **EML** 2023 sujet 0 Exercice 3 Question 1.

2.21. **Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 avec second membre.**

Question. Donner toutes les solutions de l'équation différentielle

$$y' + ay = f(t)$$

ou

$$y'' + ay' + by = f(t).$$

Variantes. On peut aussi demander la résolution des problème de Cauchy.

Remarque. Cette question fait suite aux deux questions de cours 1.10 et 1.11. Il faut maintenant appliquer le principe de superposition (et citer absolument le principe de superposition dans la rédaction).

Méthode. On suppose que l'on a résolu les équations *homogènes* associées (voir 1.10 et 1.11). On veut appliquer le principe de superposition. Pour cela, il faut trouver une solution particulière de l'équation avec second membre. Plusieurs cas peuvent se présenter (du plus facile au plus difficile) :

- Soit le texte nous donne une fonction et il s'agit simplement de montrer que cette fonction est bien solution. On la dérive donc une ou deux fois selon l'ordre de l'équadiff et on vérifie que la relation est bien satisfaite pour cette fonction de l'énoncé.
- Soit le second membre n'est pas compliqué (polynôme ou exponentielle-polynôme) et on peut deviner facilement une solution particulière : elle a la même forme que le second membre.
- Soit enfin le second membre n'a pas cette forme-là et il faut utiliser la méthode de variation de la constante.

Exemple. **ECRICOME** 2023 sujet 0 Exercice 1 Question 8.c

2.22. **Résoudre un système différentiel.**

Question. Trouver les solutions d'un système différentiel

$$X' = AX.$$

Variantes. Trouver la solution au problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X' & = & AX \\ X'(0) & = & u \end{array} \right. .$$

Remarque. Pour l'existence et/ou l'unicité de la solution à un problème de Cauchy (sans donner explicitement la solution), il suffit de citer le cours, voir la question 1.9

Méthode. Souvent la démarche est rappelée et les étapes sont marquées par une succession de questions.

- Tout d'abord, on cherche une forme simple pour A. Diagonale idéalement et (à défaut) triangulaire avec beaucoup de 0. Cette partie là de la démarche provient généralement de la première partie de l'exercice où il aura été question de réduire A. On suppose donc à partir de maintenant que l'on dispose de deux matrices P et S (S pour "simple") telles que $A = PSP^{-1}$.
- On fait le changement de variables $Y = P^{-1}X$ et on montre que X est solution du système $X' = AX$ si et seulement si Y est solution de $Y' = SY$. C'est facile et classique, attention toutefois à bien faire référence au cours lorsqu'on affirme que $P^{-1}X' = (P^{-1}X)'$.
- On résout le système $Y' = SY$. Dans le cas où S est une matrice diagonale, c'est très simple. Dans le cas où S n'est pas une matrice diagonale, ça peut être plus délicat et le texte vous guidera.
- On fait enfin le changement de variable à l'envers et on se ramène à X en posant $X = PY$.

S'il s'agit d'un problème de Cauchy, on termine en trouvant les constants grâce aux conditions initiales.

Exemple. **ECRICOME** 2023 sujet 0 Exercice 1 Question 10 (cas non diagonalisable difficile) ou **EML** 2023 sujet 0 Exercice 1 Question 2 (cas facile diagonalisable)

2.23. **Points critiques.**

Question. Trouver les points critiques d'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Variantes.

Remarque. La solution est très facile à mettre en place, mais peut poser quelques problèmes dans sa résolution pratique. En effet, il s'agira de résoudre un système (non nécessairement linéaire), pour lequel il n'y a pas de méthode systématique.

Méthode. On calcule les deux dérivées partielles et on cherche à résoudre le système

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Exemple. **EDHEC** 2021 Exercice 1 Partie I Question **2.b**

2.24. **Nature des points critiques.**

Question. Décider de la nature des points critiques.

Variantes. Montrer que le point critique est minimum ou maximum. Montrer qu'un seul des points critiques est un extremum,...

Remarque. C'est bien souvent la question qui suit la question où on a trouvé les points critiques.

Méthode. On calcule la hessienne, puis ses valeurs propres.

Exemple. **EDHEC** 2021 Exercice 1 Partie I Question **3.b**

2.25. **Lois du couple.**

Question. Trouver la loi du couple de variables aléatoires.

Variantes.

Remarque. Si les deux variables sont indépendantes, alors la question est très facile. Mais en général, elles ne sont pas indépendantes.

Méthode. Si les variables ne sont pas indépendantes, on utilise la formule des probabilités composées. Si les variables sont indépendantes, on utilise le fait que la probabilité de l'intersection est égal au produit des probabilités.

Exemple. **ECRICOME** 2016 Exercice 3 Question **4.b**

2.26. **P(X=k).**

Question. Calculer $P(X = k)$ lorsque X est une variable aléatoire associée à un *deuxième temps* d'une expérience aléatoire.

Variantes. Parfois on demande de calculer $P(X = Y)$ lorsque X et Y sont deux variables aléatoires, la méthode est la même.

Remarque. Attention au contexte de cette question ! Ici, on suppose que l'on est dans la situation suivante. On étudie une suite de deux expériences aléatoires, Y est une variable aléatoire associée aux résultats de la première expérience et X à ceux de la deuxième. Dans une ou plusieurs des questions précédentes, le sujet nous demande de calculer les probabilités conditionnelles $P_{[Y=j]}(X = k)$.

Méthode. On déduit alors des probabilités conditionnelles la valeur de $P(X = k)$ avec la formule des probabilités totales et le SCE $((Y = j))_j$ (attention à citer la formule et le SCE).

Exemple. **EDHEC** 2018 Exercice 2 Question **1.a** et **1.b** ou **EDHEC** 2021 Problème Partie I Question **1.c** pour un exemple de calcul de $P(X = Y)$.

2.27. **Espérance et variance d'un estimateur.**

Question. Calculer l'espérance et la variance d'un estimateur.

Variantes.

Remarque. Si la variance ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, il doit y avoir un problème, c'est tout le temps le cas.

Méthode. On applique simplement les définitions, on calcule l'espérance de l'estimateur (penser à la linéarité de l'espérance). Pour la variance, il faudra probablement utiliser (et écrire) que les variables qui constituent l'échantillon sont indépendantes. Car alors variance de la somme égale somme des variances.

Exemple. **EDHEC** 2018 Exercice 3 Question **6.a** et **6.c**

2.28. **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.**

Question. Montrer qu'un paramètre θ est dans un certain intervalle de la forme $[u_n, v_n]$ avec probabilité α

Variantes. Calculer la probabilité que θ soit dans l'intervalle $[u_n, v_n]$ en fonction de n. Ici α est supposé proche de 1 mais la question est souvent formulé avec $1-\alpha$ à la place de α. Dans ce dernier cas, α est supposé proche de 0.

Remarque.

Méthode. On fait apparaître l'événement $\theta \in [u_n, v_n]$ comme l'événement $|T_n - \theta| \leqslant \varepsilon$ pour un certain estimateur (souvent étudié dans l'exercice en cours) et pour un bon choix de ε. Pour le choix de ε, on procède de la manière suivante : dire que $|T_n - \theta| \leqslant \varepsilon$ est équivalent à dire que $T_n - \varepsilon \leqslant \theta \leqslant T_n + \varepsilon$ et on s'arrange pour que $T_n - \varepsilon$ et $T_n + \varepsilon$ soient les bornes u_n et v_n de l'énoncé. On applique ensuite l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour contrôler la probabilité de l'événement (ou plutôt en fait la probabilité de l'événement contraire). On n'oublie pas d'écrire que T_n admet une variance (ce qu'on aura sûrement montré auparavant) : on obtient

$$P\left(\theta \in [u_n, v_n]\right) = P\left(|T_n - \theta| \leqslant \varepsilon\right) = 1 - P\left(|T_n - \theta| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2}$$

Dans le cas de la question "variante", la démarche s'arrête là. Dans le cas de la question de base, si l'exercice est bien fait, on montre encore que la quantité $\frac{V(T_n)}{\varepsilon^2}$ est plus petite que α (l'entier n et la probabilité α auront été choisis par le concepteur pour que ça marche).

Exemple. **EDHEC** 2019 Problème Question **9.a**.

2.29. **Intervalle de confiance.**

Question. Montrer que l'intervalle $[u_n, v_n]$ est un intervalle de confiance de niveau α pour le paramètre θ.

Variantes. Que peut-on dire de l'intervalle $[u_n, v_n]$ pour le paramètre θ ? Parfois le paramètre α s'appelle en fait $1-\alpha$ (le niveau de confiance doit être proche de 1).

Remarque. C'est en général une question de conclusion (la suite de la question précédente par exemple), il suffit de récapituler les propriétés qui ont été montrées auparavant (ou de les admettre au besoin pour prendre les points de cette question).

Méthode. Il s'agit simplement de montrer que

$$P\left(\theta \in [u_n, v_n]\right) = \alpha.$$

Les questions précédentes nous ont probablement mis sur la voie (soit en ayant appliqué l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, soit avec le théorème centrale limite).

Exemple. **EDHEC** 2019 Problème Question **9.c**.

3. Encore quelques idées à toujours garder en tête.

1. Lorsque le sujet nous demande de calculer le produit de la matrice A par le vecteur X, puis qu'on nous demande d'en déduire une valeur propre, c'est probablement que le vecteur X est vecteur propre de A. Il suffit donc de vérifier que $AX = \lambda X$ pour un certain λ et d'affirmer que λ est valeur propre (car $X \neq 0$).

2. Si le sujet mélange des questions sur des valeurs propres et des questions sur l'inversibilité de certaines matrices, il faut penser à la caractérisation des valeurs propres : λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I$ n'est pas inversible (que l'on peut éventuellement utiliser dans l'autre sens : λ n'est pas valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I$ est inversible).

3. La fonction `rd.rand()` de `Python` permet de fabriquer des événements de toutes les probabilités. En effet, pour n'importe quel p, `rand() < p` est un événement de probabilité p.

4. Dans une suite de deux expériences aléatoires, lorsque le protocole de la 2ème expérience dépend des résultats de la première, il faudra forcément utiliser quelque part la formule des probabilités composées.

5. Dans une suite d'expériences de Bernoulli, on peut souvent améliorer la rédaction en introduisant (même si le sujet ne le fait pas) les événements E_n et S_n de l'échec et du succès au moment n. Les événements dont il faudra trouver les probabilités s'écrivent en général simplement à l'aide des événements E_n et S_n.

6. Si X et Y sont deux variables aléatoires, alors $P(X = Y)$ se calcule avec la formule des probabilités totales et soit le SCE $(X = k)_k$, soit le SCE $(Y = j)_j$.

7. Bien souvent (mais pas systématiquement), si le texte demande : "l'extremum local est-il extremum global ?" c'est que la réponse est non. On cherche alors un contre exemple, c'est-à-dire une valeur de (x, y) tel que $f(x, y)$ est soit plus grande que la valeur du maximum local, soit plus petite que la valeur du minimum local. Pour chercher une valeur de (x, y), on peut souvent se contenter de prendre $y = 0$ et d'utiliser les puissances de x pour trouver une grande valeur ou une petite valeur selon le besoin de $f(x, 0)$.

8. Lorsqu'il faut calculer la probabilité d'un événement qui dépend de la $n$ième étape d'une suite d'expériences aléatoires et que cette $n$ième expérience dépend des précédentes (c'est le cas par exemple dans un tirage de boules dans une urne **sans** remise ou alors avec la composition de l'urne qui se modifie à chaque étape), il faut systématiquement utiliser la formule des probabilités composées.

4. Quelques aspects techniques.

Il est très fréquent (et très frustrant !) de connaître la méthode pour répondre à une certaine question, mais de perdre les points à cause de problèmes techniques. Maintenant que les méthodes sont au point et que vous connaissez la marche à suivre pour traiter les questions de concours, il faut encore réussir à faire marcher la méthode, et ne pas se louper sur des calculs.

Voici donc enfin un récapitulatif des erreurs de calcul les plus fréquentes que j'ai vu pendant l'année, et quelques exercices pour y remédier.

"Je sais que je dois intégrer cette fonction mais je n'écris pas la bonne primitive". Voir à ce sujet la feuille de Soutien numéro 1 et la Méthodo 7

"Je sais que cette somme est une somme géométrique mais je rate le changement d'indice ou la factorisation". Voir à ce sujet la feuille de Soutien numéro 3 et la Méthodo 2

"Je sais que l'espace propre est donné par les solutions d'un système linéaire d'équations mais je me loupe dans la résolution du système". Voir à ce sujet la feuille d'exercices de Première année Systèmes

"Je sais que je dois dériver la fonction pour connaître ses variations mais je ne calcule pas correctement la dérivée". Voir à ce sujet la feuille d'exercices de Première année Fonctions

"Je sais que je dois calculer la loi de cette variable aléatoire mais je n'y arrive pas". Voir à ce sujet la feuille de Soutien numéro 2 et la Méthodo 8